

1. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt spätestens bis *Donnerstag den 24. Oktober* um 12 Uhr in den dafür vorgesehenen Briefkasten.

Aufgabe 1.

- (a) Es seien $U_1, \dots, U_k \in \overline{\mathbb{C}}$ offene Mengen. Zeigen Sie, dass $U_1 \cap \dots \cap U_k$ offen in $\overline{\mathbb{C}}$ ist.
- (b) Es seien $U_i, i \in I$ offene Mengen. Zeigen Sie, dass $\cup_{i \in I} U_i$ offen in $\overline{\mathbb{C}}$ ist.
- (c) Es sei $g = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade in $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass die a und ∞ die Punkte im Unendlichen von g sind.

Aufgabe 2.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{wenn } x = 0, \\ 0, & \text{wenn } x = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

- (b) Es sei g eine euklidische Gerade in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $g \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, versehen mit der Teilraumtopologie als Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$, homöomorph zu S^1 ist.

Aufgabe 3.

- (a) Zeigen Sie, dass euklidische Kreise in $\mathbb{C}$ gerade die Mengen sind, welche beschrieben werden können als

$$\{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\}$$

für ein $a \neq 0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$, wobei $b \neq 0$ oder $c \neq 0$.

- (b) Zeigen Sie, dass euklidische Geraden in $\mathbb{C}$ gerade die Mengen sind, welche beschrieben werden können als

$$\{z \in \mathbb{C} \mid bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\}$$

für ein $b \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$, wobei $b \neq 0$.

Aufgabe 4.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\} &\rightarrow \operatorname{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Wir schreiben

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \pm \text{id},$$

d.h. $PSL(2, \mathbb{C})$ ist der Quotient der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ durch den Normalteiler $\{\pm \text{id}\} \subset SL(2, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} PSL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \end{aligned}$$

ein wohl-definierter *Gruppenisomorphismus* ist.